

# 基本再生産数 $R_0$ の数学

稲葉 寿 (東京大学)

Hisashi Inaba (The University of Tokyo)

[inaba@ms.u-tokyo.ac.jp](mailto:inaba@ms.u-tokyo.ac.jp)

人口学の基礎は年齢構造をもつ人口のダイナミクスの数学的理解にある。年齢構造化人口ダイナミクスはロトカの安定人口理論がその端緒であるが、そこでは純再生産率が、人口集団の大域的挙動と個体のライフサイクルを結びつけるキーパラメータとして登場する。この純再生産率は、感染症疫学において、完全な感受性集団において発生した感染の初期におけるプライマリーケースが作り出す二次感染者平均数を表す基本再生産数(basic reproduction number;  $R_0$ )という概念と数学的には同等であり、 $R_0$ は過去四半世紀において、感染症数理モデルの文脈において、その中心的概念として大いに発展した。1990年代以降の感染症理論疫学の発展には、 $R_0$ の厳密な数学的定式化が Diekmann, Heesterbeek and Metz (1990)によって与えられたことが決定的な役割を果たしている。

$R_0$ 概念は、本来は定常的な環境において、密度効果等の非線形効果のない人口集団の発展を特徴付ける指標であるが、多くの状況では大域的な非線形ダイナミクスの挙動を特徴付ける指標にもなっている。近年、時間変動する環境においても人口集団の増殖の閾値条件を与えるように拡張できることがわかってきた。

Bacaër and Guernaoui (2006)は、時間周期的な環境において、基本再生産数を感染症の侵入閾値として定義できることを示した。Inaba (2012)は、全く一般的な時間変動環境において、状態空間を時間を含む拡張された空間として、そのうえで世代分布の再生産過程を与える世代推進作用素(generation evolution operator)を定義すれば、それによって生成される世代分布の列から基本再生産数が定義できることを示した。またそのような定義が、周期的時間変動環境や定常環境における在来の定義を含むより一般的な定義になっていることを示した。しかし一般に世代推進作用素のスペクトル半径が基本再生産数を与えるかどうかについては問題として残されていた。

一方、Thieme (2013)が示しているように、一次同次の正作用素に関する固有値問題に関連して発達してきた錐スペクトル半径の理論を用いると、Inaba (2012)の定義は、基本再生産数を世代推進作用素の local spectral radius として定義していたことになり、状態空間をベクトル値可積分関数の空間としてとっているの、それはまた軌道スペクトル半径および錐スペクトル半径にひとしいことが示される。さらに状態空間の再生性を用いれば、世代推進作用素のスペクトル半径にひとしいことが示される。

上記のような一般時間変動環境における基本再生産数は線形の非自律的再生方程式によって導入されるが、それが非線形モデルにおいて持つ意義は未だ未解明である。定常環境における基本再生産数が個体群の侵入条件や共存条件になることは、自律的な個体群力学系における線形化安定性原理によって保証されている。しかしながら、一般の時間変動環境においては、同様な原理は存在しない。本研究では、発展半群(evolution semigroup)の考え方によって非自律的方程式を時間を含む拡張された状態空間における自律的な方程式を誘導することで、解の大域的挙動に関する基本再生産数の閾値性を示すことを試みる。この考え方は、特に周期的環境における時間周期解の存在と安定性を示すために有効であると思われることから、年齢構造をもつ SIS 型感染症数理モデルに対する応用を示す。

## References

N. Bacaër and S. Guernaoui, The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality, *J. Math. Biol.* 53, 421-436 (2006).

O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek and J. A. J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.* 28, 365-382 (1990).

H. Inaba, On a new perspective of the basic reproduction number in heterogeneous environments, *J. Math. Biol.* 65, 309-348 (2012).

H. Inaba, *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Springer, Singapore (2017).

H. R. Thieme, Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity, *SIAM J. Appl. Math.* 70(1), 188-211 (2009).

H. R. Thieme, Eigenvectors and eigenfunctionals of homogeneous order-preserving maps, arXiv:1302.3905v1 [math.FA] 15 Feb 2013.